

## Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике 2008/2009 учебный год

### 1.2009 (10,11) ЛОГИКА, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Функция двух переменных  $f(x, y)$  положительна при всех  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 8x + 14, \\ y \geq x^2 + 2x - 3. \end{cases}$$

При всех остальных  $(x, y)$  функция  $f(x, y)$  отрицательна. Верно ли, что при всех  $(x, y)$ , удовлетворяющих неравенству  $y \leq x^2 - 4x + 7$ , функция  $f(x, y)$  отрицательна? Ответ обосновать.

### 2.2009 (9,10) ЛОГИКА, КОМБИНАТОРИКА

Сколько различных по величине или по расположению прямоугольников, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске 8 на 8. (Доску не крутить!)

### 3.2009 (11) (аналог 5.11.2011)

### 4.2009 (9?,10,11) МНОГОЧЛЕНЫ, ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

Найти ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ .

### 5.2009 (10,11) ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Найти все значения параметра  $a$ , при которых отрезок  $[4a, 5a^2]$  содержит целое число.

### 6.2009 (11) ЛОГИКА, СТЕРЕОМЕТРИЯ

Все ребра тетраэдра равны 12 см. Можно ли его уместить в коробку, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами 13 см, 15 см, 9 см.

### 7.2009 (10,11) ЛОГИКА, НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

В каждой точке декартовой плоскости с целочисленными координатами, кроме начала координат  $(0,0)$ , построена окружность радиуса  $10^{-6}$  с центром в этой точке. Доказать, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекается хотя бы с одной из этих окружностей.